O RELACIJAMA

JOŠKO LJUBKOVIĆ
Filozofski fakultet u Zadru
Faculty of Philosophy in Zadar

UDK/*UDC*: 512
Stručni članak
Professional paper

Primljeno
: 1997-05-12
Received

Na razini razredne nastave se gotovo svakodnevno, svjesno ili nesvjesno, susrećemo s raznim vrstama odnosa, relacija među objektima,[1] koje izučavamo. Svrha je ovog članka, da se taj pojam i njegova svojstva preciziraju i sistematiziraju sa matematičkog stajališta.

KLJUČNE RIJEČI: uređeni par, Kartezijev produkt, relacija, uređaj, partitivni skup, obratna relacija, dekompozicija skupa, relacija ekvivalencije

Radeći s učenicima matematiku, ali i poznavanje prirode, ili nešto treće, dolazimo u situaciju da pojedine objekte, o kojima govorimo, smatramo ravnopravnima, jednakima, ili ih pak po nekom kriteriju uspoređujemo. Isto tako često izdvajamo u zasebne cjeline objekte, koji se odlikuju nekim zajedničkim svojstvom. Tako govorimo o skupu svih (prirodnih) brojeva djeljivih s 3, o svim trokutima ravnine koji imaju iste stranice ili o svim kružnicama s istim središtem. Isto tako u abecedi možemo istaknuti samoglasnike ili ona slova koja imaju kvačicu, a u nekom tekstu npr. sve imenice. Među drvećem možemo izdvojiti crnogorično, među cvijećem tzv. trajnice (tj. biljke, koje ne treba svake godine nanovo sijati ili saditi), među povrćem ono hranjiva korijena, pa među sisavcima domaće životinje itd.

[1] Riječ 'objekt' u ovom tekstu nam služi kao zajednički naziv za brojeve, geometrijske tvorevine, slova, riječi, biljke i životinje i za razne druge predmete i stvari.

Nadalje, često uočavamo koliko je djevojčica (dječaka) u nekom razredu ili iz nekog razloga izdvajamo sve učenike npr. četvrtih razreda u školi. Zanimljiv je i skup svih nastavnika te škole. U mjestu gdje živimo možemo tražiti i sve kuće koje su dvokatnice (ili bar dvokatne), ili pak one, koje imaju ravne krovove. Itd., itd.

Kako vidimo, primjera o kojima smo uvodno govorili je mnogo, raznolikih i raznovrsnih, susrećemo ih na svakom koraku.

Želja nam je, da ovom fenomenu srodstva i zajedništva u raznim područjima, bilo školske nastave, bilo uopće u životu, pristupimo sistematski, i da ga nastojimo objasniti na jedinstven način u okviru matematike, kao pojam koji nazivamo relacija.

Neka je, dakle, X bilo koji skup, a $a, b \in X$ njegovi elementi. Ti elementi čine **uređeni par**, u oznaci (a, b), ako propišemo, koji je od elemenata prvi u paru, a koji drugi. Prema tome (a, b) i (b, a) su različiti uređeni parovi. Kao što znamo skup svih uređenih parova elemenata iz skupa X naziva se **Kartezijev kvadrat** tog skupa i piše X^2 dakle je

$$X^2 = X \times X = \{(a,b) \mid a,b \in X\}.$$

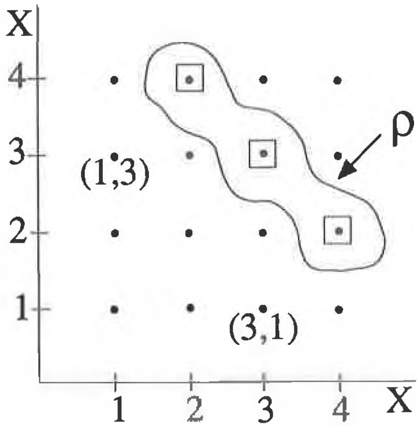
Uzmimo npr. da je

$$X = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Onda je Kartezijev kvadrat od X skup

$$X^2 = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}.$$

Taj skup možemo predočiti i grafički



Tu je svaki par, element skupa X^2, označen točkom na presjeku horizontale i vertikale, određenih prvim odnosno drugim brojem u tom paru.

Promatrajmo sada sve one uređene parove (a, b) elemenata iz X, čiji je zbroj 6, tj. za koje vrijedi

$$a+b=6.$$

To su, dakako, parovi

$$(2,4),(3,3),(4,2),$$

koje ćemo, tj. pripadne točke u grafičkom prikazu skupa X^2, ograditi kvadratićima. Ako skup tih parova označimo s ρ, vidimo da je

$$\rho \subset X^2.$$

Taj skup određuje na X jednu relaciju. Kažemo, naime, da je $a \in X$ u srodstvu, odnosu ili relaciji s elementom $b \in X$ i pišemo $a\rho b$, ako je par $(a, b) \in \rho$. Tako je u našem slučaju

$$2\rho 4, 3\rho 3, 4\rho 2,$$

a danu relaciju onda zovemo "daje u zbroju 6".

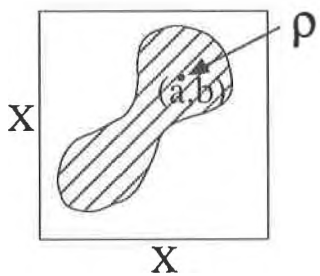
Posve je analogna i opća definicija relacije: Neka je X bilo koji skup, X^2 njegov Kartezijev kvadrat, a $\rho \subset X^2$ podskup tog kvadrata. Neka su $a, b \in X$. Kažemo da je a **u relaciji** ρ s b i pišemo

$$a\rho b$$

ako i samo ako je uređeni par

$$(a, b) \in \rho.$$

Kako je taj odnos potpuno određen skupom ρ, često se još kaže, da je podskup



$\rho \subset X^2$ jedna **relacija na skupu** X. Svaki podskup od X^2 je u stvari neka relacija na X.

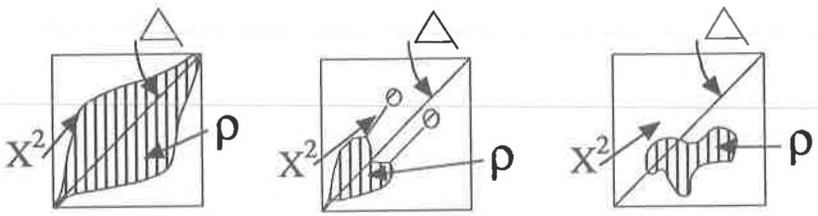
Naravno, od posebnog su interesa relacije, koje imaju neka (dobra) dodatna svojstva. Kažemo da je relacija ρ

(1) **refleksivna**, ako je $a\rho a$, za svako $a \in X$,

(2) **simetrična**, ako iz $a\rho b$ slijedi, da je nužno i $b\rho a$,

(3) **antisimetrična**, ako je istodobno ispunjeno i $a\rho b$ i $b\rho a$ samo u trivijalnom slučaju, kad je $a = b$,

(4) **tranzitivna**, ako $a\rho b$ i $b\rho c$ povlači, da je i $a\rho c$.



Na slici je prva relacija refleksivna, druga je simetrična, a treća je antisimetrična. Ako skup $\Delta = \{ (a, a) \mid a \in X \} \subset X^2$ prirodno nazovemo **dijagonala** od X^2, onda je jasno iz definicije, da refleksivna relacija mora sadržavati dijagonalu, dok je simetrična relacija zaista simetrična u odnosu na tu dijagonalu.

Relaciju ρ nazivamo **relacija ekvivalencije**, ako je istodobno i refleksivna i simetrična i tranzitivna. To je osobito važan tip relacije, jer se pomoću takve relacije, kako ćemo vidjeti, mogu klasificirati elementi u okviru danog skupa. Umjesto $a\rho b$ se u slučaju relacije ekvivalencije obično piše $a \sim b$.

Drugi važan tip relacije je tzv. **relacija uređaja**. To je relacija, koja je refleksivna i tranzitivna, ali nije simetrična, nego je antisimetrična. Relacija uređaja se standardno označuje s $\leq$, pa pišemo

$$a \leq b.$$

Ako je dodatno ispunjen i uvjet

(5) za svaki $a, b \in X$ je ili $a \leq b$ ili $b \leq a$ ili oboje,

onda kažemo, da je uređaj $\leq$ na skupu X **potpun**.

U matematici su najvažniji primjeri. Da bi se neki novi pojam dobro razumio i usvojio, važno ga je ilustrirati s dovoljno prikladno odabranih primjera. Zato ćemo sada spomenuti nekoliko tipičnih i poučnih primjera relacija, posebno onih, koji se javljaju u aritmetici i geometriji nižih razreda osnovne škole.

PRIMJER 1

Neka je s

$$N = \{1, 2, \ldots\}$$

kao obično, označen skup svih prirodnih brojeva. Tu je, dakako, najjednostavnija relacija =, koju čitamo "biti jednak", i to je očito relacija ekvivalencije. No, na skupu N su definirane i relacije $\leq$ ("manji ili jednak od") i $\geq$ ("veći ili jednak od"), za koje se odmah provjeri da su relacije potpunog uređaja. Naprotiv relacije $<$ ("manji od") odnosno $>$ ("veći od") su tranzitivne relacije, koje nisu relacije uređaja, jer npr. nisu refleksivne.

PRIMJER 2

Na istom skupu N definiramo relaciju "biti višekratnik od" i pišemo a v b ako i samo ako je a djeljiv brojem b. Odmah se vidi da je to jedna relacija uređaja na N, kažemo **djelomičnog**, jer nije potpun, budući da očito ima brojeva $a, b \in$ N za koje nije ispunjeno ni a v b niti b v a. Slično, definiramo relaciju "biti mjera od", tj. pišemo a m b (često i $a \mid b$) ako i samo ako a dijeli broj b. I to je relacija djelomičnog uređaja na N.

PRIMJER 3

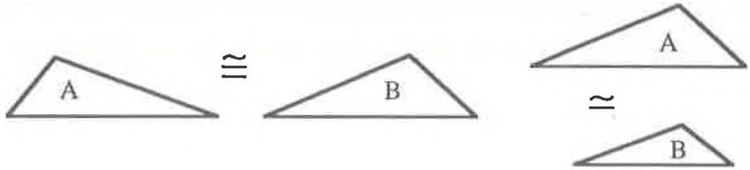
Relacije dakako mogu biti i neobične, osebujne. Tako na N možemo npr. definirati relaciju ρ stavljajući $a\rho b$ ako i samo ako je

$$b = 3a^2 - 2a.$$

Da li ta relacija ima koje od navedenih svojstava? Možda samo za neke $a \in$ N?

PRIMJER 4

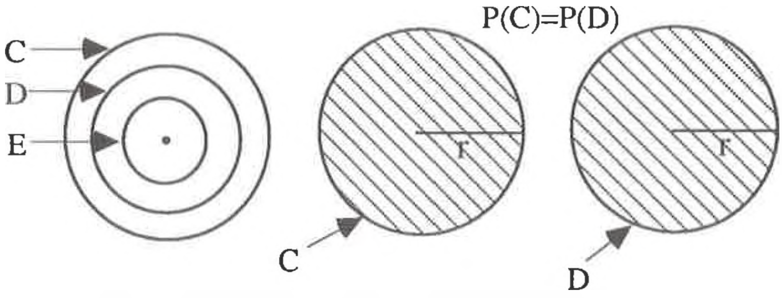
Neka je s T označen skup svih trokuta u ravnini. Kažemo, kao obično, da je trokut A sukladan s trokutom B i pišemo $A \cong B$, ako ti trokuti imaju stranice jednakih duljina (pa onda i jednake kutove; kao posljedica, izrezivanjem se jednim može prekriti drugi). Relacija "biti sukladan" je naravno relacija ekvivalencije na T. Trokut A je sličan s trokutom B, pišemo $A \simeq B$, ako ti trokuti imaju jednake kutove (pa onda i razmjerne stranice!); to je



također relacija ekvivalencije na T. Napokon, ako s $P(X)$ označimo površinu trokuta $X \in$ T, pa pišemo $A = B$ ako i samo ako je $P(A) = P(B)$, tj. trokuti A i B su iste površine, onda je i ta "jednakost" relacija ekvivalencije. U drugu ruku, ako pišemo $A \leq B$ ako i samo ako je $P(A) \leq P(B)$, onda je $\leq$ jedna relacija uređaja na T. Isto, kao i analogna relacija $\geq$. Razmatranja u ovom primjeru se lako poopćavaju npr. na četverokute, mnogokute i uopće na razne figure u ravnini i prostoru.

PRIMJER 5

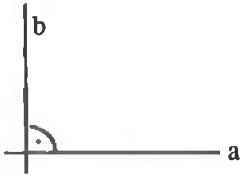
Još jedan primjer prethodnog tipa. Neka K označuje skup svih kružnica ravnine. Za kružnice $C, D \in$ K ćemo reći da su ekvivalentne i pisati $C \sim D$, ako te kružnice imaju isto središte. Radi se dakako o dobroj relaciji ekvivalencije. U drugu ruku, možemo definirati i pisati $C = D$, ako je $P(C) = P(D)$ tj. ako te kružnice omeđuju krugove iste površine (ili što je isto, imaju jednake polumjere), pa onda i $C \leq D$, ako je $P(C) \leq P(D)$.

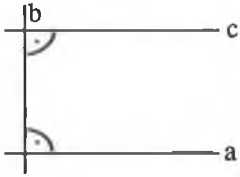


Prva od tih relacija je, dakako, relacija ekvivalencije na K, a druga relacija potpunog uređaja.

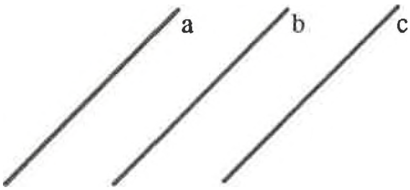
PRIMJER 6

Neka je sada P skup svih pravaca u ravnini. Na tom skupu možemo promatrati relaciju "biti okomit", u oznaci $\perp$, koja je očito simetrična, ali nije refleksivna, niti je tranzitivna, jer $a \perp b$ i $b \perp c$ ne povlači $a \perp c$, nego su naprotiv pravci a i c paralelni.





U drugu ruku, relacija ||, tj. relacija "biti paralelan" je simetrična i tranzitivna, ali nije refleksivna. Ali, ako uobičajenu definiciju paralelnosti proširimo, pa kažemo da su pravci *a* i *b* paralelni, ako nemaju ni jednu točku zajedničku ili su im sve točke zajedničke, ta relacija



postaje i refleksivna, dakle relacija ekvivalencije na skupu P.

PRIMJER 7

Neka je X bilo koji skup, a

$$P(X) = \{A | A \subseteq X\}$$

neka je skup svih njegovih podskupova, **partitivni skup** od X. Na $P(X)$ definiramo relaciju $\leq$ stavljajući $A \leq B$, ako i samo ako je $A \subseteq B$. To je onda relacija uređaja na $P(X)$ i to djelomičnog, a ne potpunog, jer je jasno, da će biti i podskupova $A, B \in P(X)$, za koje nije ispunjeno ni $A \subseteq B$ ni $B \subseteq A$. Analogno definiramo na $P(X)$ relaciju uređaja $\geq$.

PRIMJER 8

Promatrajmo sada skup X svih stanovnika nekog (npr. vašeg) mjesta. Na tom skupu možemo definirati razne relacije, kao što su

(a) "je vjenčan sa"
(b) "je potomak od"
(c) "je istog spola kao"
(d) "je stariji nego".

Kakva dodatna svojstva imaju te relacije? Što možeš reći o relaciji "je rođak od"?

PRIMJER 9

Pojam relacije na nekom skupu X se može poopćiti tako, da umjesto kvadrata tog skupa promatramo Kartezijev produkt

$$X \times Y = \{(a, b) \mid a \in X, b \in Y\}$$

općenito različitih skupova, dakle skup uređenih parova, u kojima je prvi element iz skupa X, a drugi iz skupa Y. Relaciju i ovdje definiramo pomoću podkupa $\rho \subset X \times Y$. Evo jednostavnog primjera. Neka je

$$X = \{A,B,C,D\}$$

skup od četiri prijatelja, a s

$$Y = \{K_1, K_2, K_3\}$$

neka su označene tri nedavno izašle knjige. Prijatelji vole čitati, pa se na razgovoru uz kavu ustanovilo, da je

osoba A pročitala knjige K_2 i K_3,

osoba B pročitala knjigu K_2,

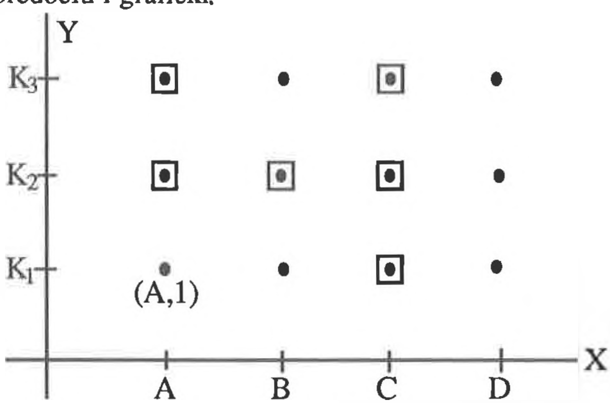
osoba C pročitala je tri knjige K_1, K_2, K_3, a

osoba D nije pročitala nijednu od tih knjiga.

Te informacije možemo onda interpretirati kao jednu relaciju između skupova X i Y. Označimo ju npr. s $\uparrow$, i nazovimo "je pročitao knjigu". Onda imamo redom.

$$A \uparrow K_2,\ A \uparrow K_3;\ B \uparrow K_2,\ C \uparrow K_1,\ C \uparrow K_2,\ C \uparrow K_3,$$

što možemo predočiti i grafički.



Tu su, kao i prije, istaknuti parovi ograđeni kvadratićima. Vidimo da je relacija $\uparrow$ i ovdje određena podskupom od $X \times Y$,

$$\mathrm{rel} \uparrow \subset X \times Y.$$

Na istom skupu $X \times Y$ možemo definirati i relaciju "nije pročitao knjigu", označimo ju s $\downarrow$. Tu relaciju zovemo **suprotna** ili **obratna** relacija relacije $\uparrow$. Predoči i tu relaciju na prethodnom grafičkom prikazu. Što primjećuješ? Kako bi općenito definirali relaciju suprotnu relaciji $\rho \subset X \times Y$? Ilustriraj drugim primjerima!

Na kraju, kažimo nešto o **rastavu, particiji** ili **dekompoziciji** danog skupa, i o vezi tog pojma s pojmom relacije, koji smo upravo obradili. Neka je, dakle, X neprazni skup, a $\mathfrak{R}$ izbor podskupova od X tako da

(a) članovi od $\mathfrak{R}$ nisu prazni,

(b) presjek bilo koja dva člana od $\mathfrak{R}$ je prazan, i

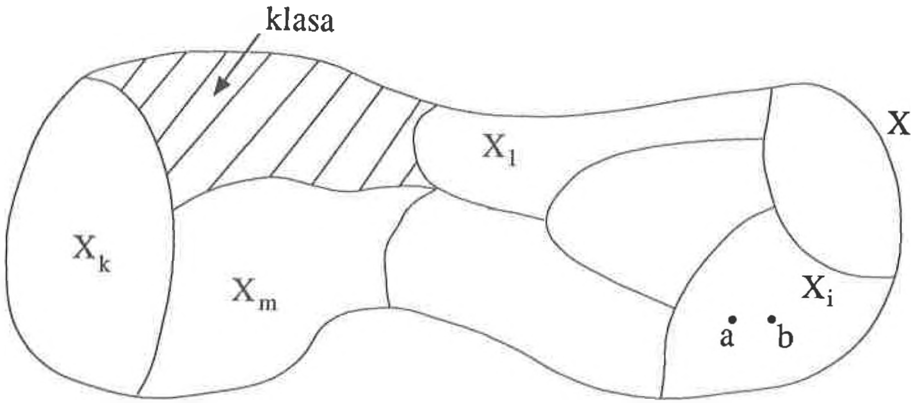
(c) unija svih članova od $\mathfrak{R}$ je čitav X.

Onda kažemo da je $\mathfrak{R}$ jedan rastav skupa X. To možemo lijepo zapisati ovako: Familija

$$\mathfrak{R} = \{X_1, X_2, ..., X_m \mid X_j \subset X, X_j \neq \emptyset, j = 1, ..., m\}$$

je rastav skupa X, ako je

$$X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_m = X, \text{ i}$$
$$X_i \cap X_k = \emptyset, \text{ za } i \neq k$$



Svaka particija prirodno definira neku relaciju na skupu X. Zaista, smatrat ćemo da su $a, b \in X$ u relaciji ρ, $a\rho b$, ako i samo ako su to elementi istog člana particije $\mathfrak{R}$,

$$a, b \in X_i \in \mathfrak{R}.$$

Ilustrirajmo to klasičnim primjerom. Neka je $X = \mathrm{N}$, tj. skup prirodnih brojeva. Odaberimo jedan prirodni broj m, npr. $m = 3$. Kod dijeljenja prirodnih brojeva s 3 mogući ostatak je 0, 1 ili 2. Razvrstajmo sve prirodne brojeve u tri podskupa i to tako da su u prvom podskupu oni, koji su djeljivi s 3, u drugom su brojevi koji kod diobe s 3 daju ostatak 1, a u trećem oni brojevi, koji kod te diobe imaju ostatak 2, dakle

$$X_0 = \{3,6,9,...\}$$
$$X_1 = \{1, 4, 7,...\}$$
$$X_2 = \{2, 5, 8,...\}.$$

Odmah se vidi da smo tako dobili jedan rastav $\mathfrak{R}$ skupa N, jer je očito

$$X_0 \cup X_1 \cup X_2 = \mathrm{N}, \mathrm{i}$$
$$X_1 \cap X_2 = \varnothing,\ X_2 \cap X_0 = \varnothing,\ X_0 \cap X_1 = \varnothing.$$

No, sada ćemo reći da su brojevi $a, b \in \mathrm{N}$ u relaciji ρ, ako pripadaju istom članu rastava $\mathfrak{R}$, tj. ako su oba ta broja ili u skupu X_0 ili X_1 ili X_2. Tako je npr.

$$3\rho 3,\ 6\rho 3,\ 9\rho 6,\ 60\rho 3, \text{itd.}$$
$$4\rho 1,\ 7\rho 1,\ 7\rho 4,\ 10\rho 4, \text{itd.}$$
$$5\rho 2,\ 8\rho 5,\ 11\rho 5,\ 17\rho 8, \text{itd.}$$

Primijetimo da članovi rastava $\mathfrak{R}$ imaju zanimljivo svojstvo: razlika bilo kojih dvaju elemenata u bilo kojem, ali istom članu rastava, djeljiva je uvijek s 3, npr.

$$9 - 3 = 6,\ 7 - 4 = 3,\ 8 - 2 = 6\ .$$

Zato možemo relaciju ρ definirati i ovako: neka je $a, b \in \mathrm{N}$ i $a \geq b$. Onda je $a\rho b$ ako i samo ako je razlika $a - b$ djeljiva s 3. Tu relaciju obično pišemo kao

$$a \equiv b \pmod 3).$$

i čitamo "a je kongruentno b modulo 3". Relacija je očito refleksivna i tranzitivna (a i simetrična, dakle relacija ekvivalencije, ako znamo dijeliti i negativne cijele brojeve). Ta važna relacija se lako poopćuje uzimajući bilo koji broj $m \in \mathrm{N}$, pa imamo i relaciju

$$a \equiv b \pmod m).$$

Konačno, napomenimo da vrijedi i neka vrsta obrata prethodne tvrdnje. Svaka, naime, relacija dobrih svojstava, točnije svaka relacija ekvivalencije ρ na skupu X jednoznačno određuje jednu particiju $\mathfrak{R}$ toga skupa. U tu se svrhu promatraju podskupovi od X sa svojstvom da su u pojedinom takvom skupu sadržani oni i samo oni elementi od X, koji su međusobno u relaciji ρ. Pokazuje se da su u slučaju kad je ρ relacija ekvivalencije, ti skupovi disjunktni i da pokrivaju cijeli X, pa prema tome definiraju jednu particiju $\mathfrak{R}$ tog skupa. Elemente istog člana particije $\mathfrak{R}$ smatramo ravnopravnima, ekvivalentnima (jednakima u odnosu na relaciju ρ), a sam taj član nazivamo i **klasom ekvivalencije**. Preko relacije ρ provodimo, dakle, razvrstavanje, klasifikaciju elemenata skupa X, pa se često ta relacija ekvivalencije zove i **relacija klasifikacije**. Tako npr. cijele brojeve možemo razvrstati na parne i neparne, a relacija $\equiv$ (mod 3) razvrstava ih u tri klase ekvivalencije, već spomenute X_0, X_1 i X_2. Relacije $\cong$ i $\sim$ razvrstavaju trokute na klase međusobno sukladnih odnosno sličnih trokuta, pa relacija $\|$ sve pravce na skupove uzajamno paralelnih pravaca (tzv. smjerova) itd. Klasificiramo i učenike po razredima, ili po uspjehu, a čitatelje ovog članka mogli bi klasificirati po stupnju njihovog razumijevanja članka. Na temelju koje relacije?

Važno je koji puta dohvatiti, prolistati, pa i pročitati poneku knjigu iz struke. Evo malog izbora literature, koja je u vezi s temom:

HORVATIĆ, K. (1995): *Linearna algebra I*, Zagreb, Matematički odjel PMF.
KUREPA, S. (1970): *Uvod u matematiku*, Zagreb, Tehnička knjiga.
LIEBECK, K. (1995): *Kako djeca uče matematiku*, Zagreb, Educa.
PAVKOVIĆ, B., VELJAN, D. (1992): *Elementarna matematika I*, Zagreb, Tehnička knjiga.

Joško Ljubković: CONCERNING RELATIONS

Summary

At the level of teaching elementary school one is daily, consciously or subconsciously, confronted with different kinds of relations between the objects to be taught. The purpose of the article is to make precise and to systematize this concept from the standpoint of mathematics.

KEY WORDS: assotiated pair, Cartesian product, relation, device, partitive set, reverse relation, decomposition of the set, the relation of equivalence